第11讲　受力分析与共点力的平衡（2）

——解决共点力平衡问题的常用方法

解平衡问题的常用方法

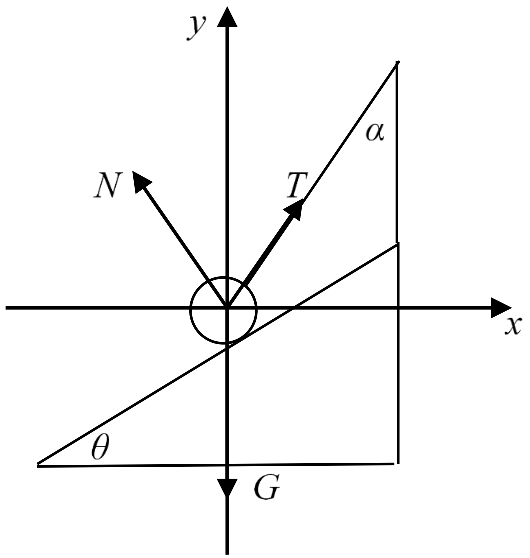
- 正交分解法
- 动态三角形法
- 相似三角形法
- 整体法与隔离法相结合

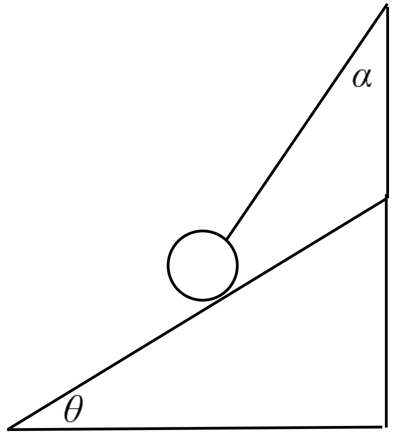
正交分解法

【例 1】如图所示，用一根细绳把一个光滑球连接在一个斜面上，已知球重$G=500\sqrt{3}$N，斜面倾角 θ=30^0，细线对球的拉力为 T=500N，求：

（1）细线和竖直方向的夹角 α（α 为锐角）；

（2）斜面对球的支持力 N。





$$T\cos\alpha+N\cos\theta=G$$
$$T\sin\alpha-N\sin\theta=0$$

由①②变形得到

$$T\cos\alpha=G-N\cos\theta$$
$$T\sin\alpha=N\sin\theta$$

两式平方相加得到：

$$T^2=(N\cos\theta-G)^2+N^2\sin^2\theta$$

$$T^2=2NG\cos\theta+G^2+N^2$$

这是一个关于 N 的一元二次方程，解得

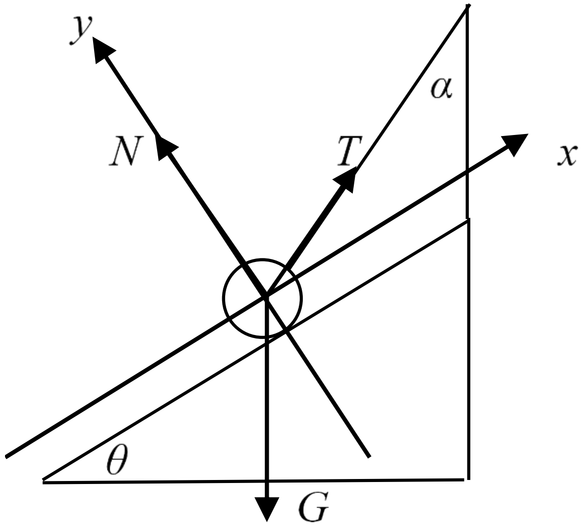
N_1=1000N（舍），N_2=500N

当 N_1=1000N 时，$\sin\alpha=2\sin\theta=1$，$\alpha=90^0$（舍）

当 N_2=500N 时，$\sin\alpha=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=30^0$。

方法二：

$$G\sin\theta = T\cos(90^0-\theta-\alpha) \qquad ①$$



$$N + T\sin(90^0-\theta-\alpha) = G\cos\theta \qquad ②$$

由①式得 $\sin(\alpha+\theta) = \frac{500\sqrt{3}}{500}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

由于 $0^0 < \alpha+\theta < 180^0$

$\alpha+\theta = 60^0$ 或者 120^0，即 $\alpha = 30^0$ 或者 90^0（舍）

代入②式得 $N = G\cos 30^0 - T\cos 60^0 = 500\,\mathrm{N}$

总结：

正交分解法是处理平衡问题最常用的方法，若所有的力在同一平面内，有：

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$$

一般步骤如下：

①选对象：根据题目要求，选取个体（质点）或整体（质点系）作为研究对象；

②画受力图：对研究对象作受力分析，画出受力示意图；

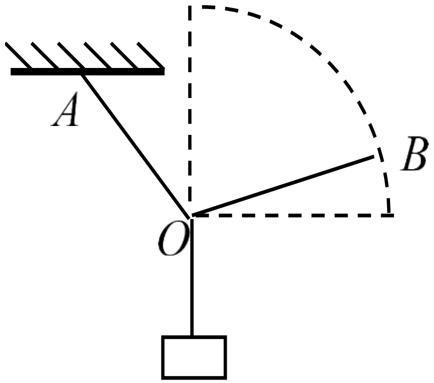
③建坐标：选取合适的方向建立直角坐标系；

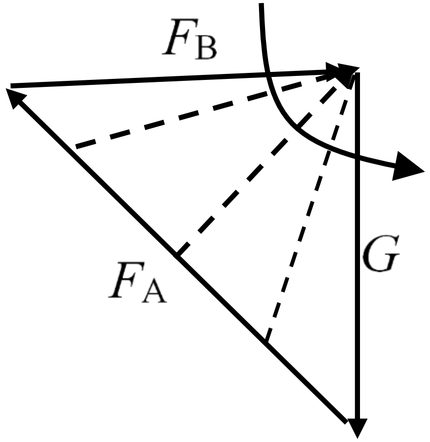
④列方程：根据平衡条件，列出平衡方程；

⑤解方程：联立方程组求解，对结果进行必要的讨论。

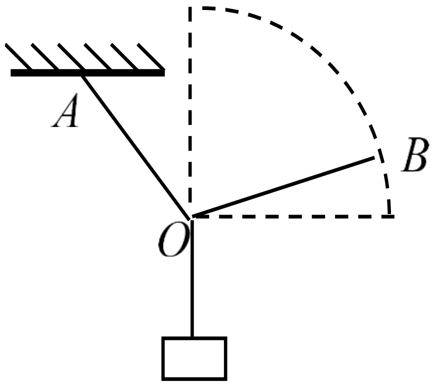
动态三角形法

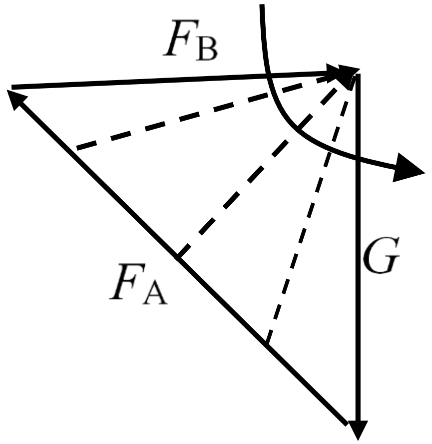
【例2】如图所示，重为G的物体用细绳OA、OB悬挂起来，现保持细绳OA不动，使细绳OB绕O点从水平状态转至竖直的过程中，两段细绳OA、OB所受拉力的大小如何变化？





【解析】结点O受三个力：重力G、拉力F_A、拉力F_B。将此三力首尾相接构成矢量三角形。当F_B绕其一端逆时针转动时，另一端在F_A上滑动。这种动态变化可以看出OA绳所受拉力F_A<u>逐渐减小</u>，OB绳所受拉力F_B<u>先减小后增大</u>，当$OA \perp OB$时，F_B有最小值。





【**点评**】解题的关键是作出力的动态三角形。作图时要特别注意以下四点：

①哪些边（力）动？哪些边（力）不能动？

（恒力对应的边是不动边，多数实例中的恒力是重力）

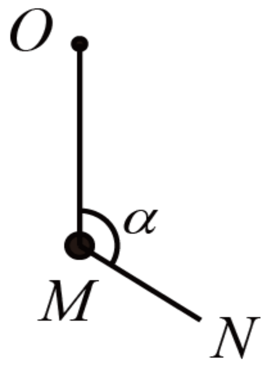
②动的边（力）是在绕三角形的哪一点转动？是顺时针还是逆时针转动？

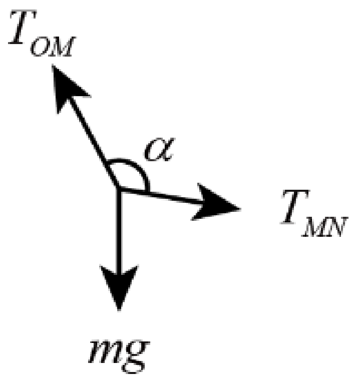
③转动的角度范围有无限制？

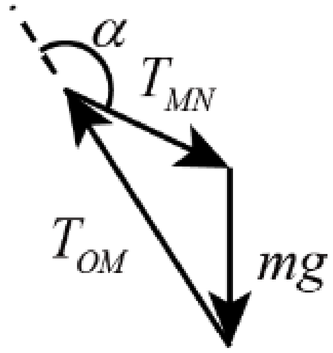
④对应力的大小变化是单调性的还是非单调性的？

【例 3】（2017 全国新课标 1）如图所示，柔软轻绳 ON 的一端 O 固定，其中间某点 M 拴一重物，用手拉住绳的另一端 N。初始时，OM 竖直且 MN 被拉直，OM 与 MN 之间的夹角为 α（$\alpha > \frac{\pi}{2}$）。现将重物向右上方缓慢拉起，并保持夹角 α 不变。在 OM 由竖直被拉到水平的过程中（　　）

A．MN 上的张力逐渐增大
B．MN 上的张力先增大后减小
C．OM 上的张力逐渐增大
D．OM 上的张力先增大后减小

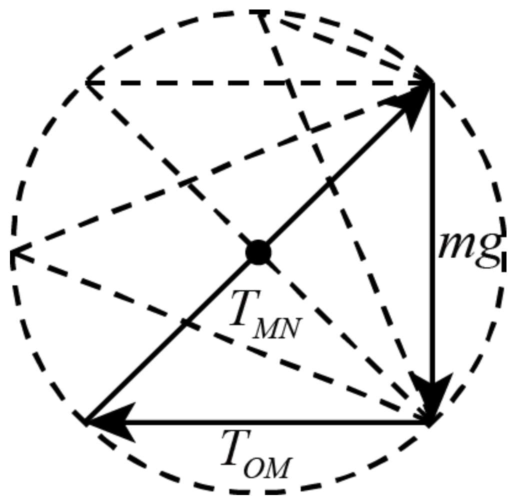






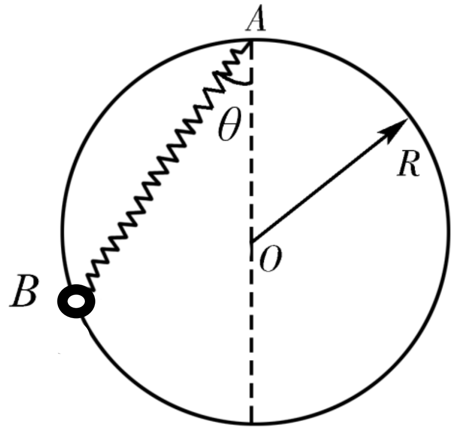
【答案】AD

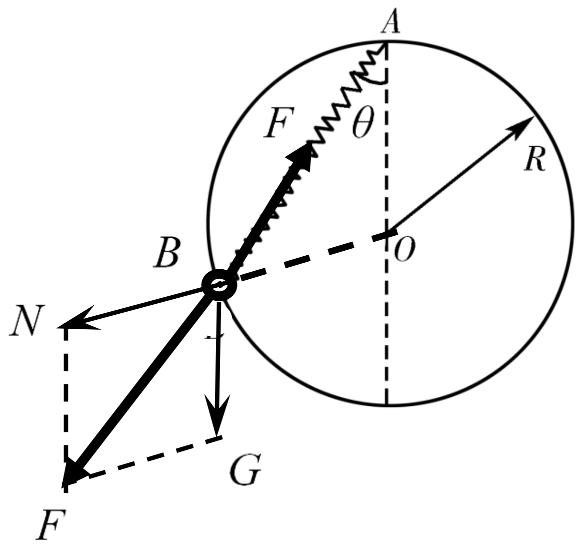
【点评】本题因为“动”的地方比较多，故有一定的难度。相比上一题而言，本题借助“参考圆”分析更加巧妙，因为有两个力的方向变化，但夹角不变，故联想到“圆上同一弦对应的圆周角不变”。而且圆还有一个特征，就是“圆上最长的弦是直径”，这会导致力出现非单调性变化。



相似三角形法

【例4】如图所示，小圆环重为G，连着弹簧套在半径为R的固定竖直大环上，弹簧上端固定在大环的顶点A处，小环平衡后位于B处。弹簧原长为L，劲度系数为k，不计一切摩擦。求小环静止时，弹簧与竖直方向的夹角的余弦$\cos\theta$=？





$$\frac{G}{F}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

$$F=\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}G=\frac{\overline{AB}}{R}G$$

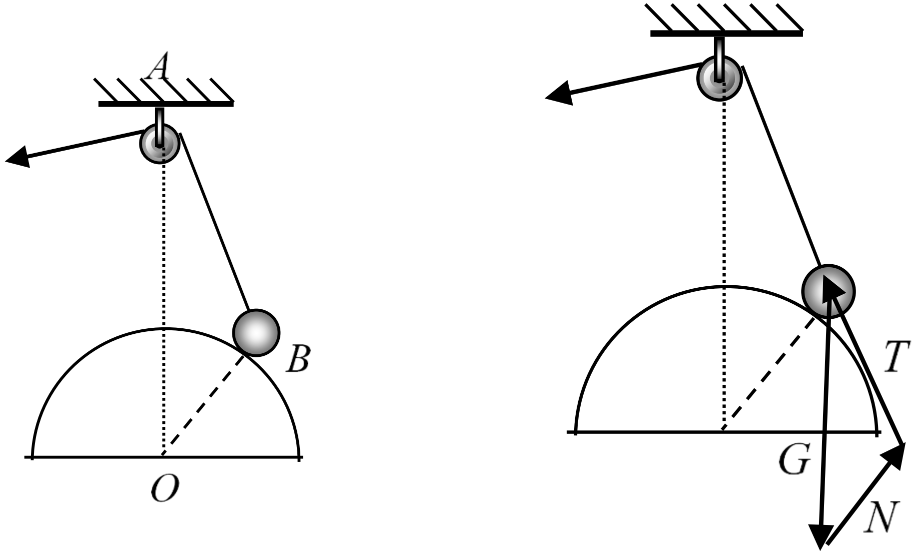
$$F=k(2R\cos\theta-L)$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}}{2R}$$

$$\cos\theta=\frac{kL}{2(kR-G)}$$

思考：本题是否可以用正交分解法解题？如何建立正交坐标系？

【例5】如图所示，将重为G的小球，用轻绳跨过轻小定滑轮A吊起来，并靠在光滑的半径为r的较大的半球体的B点上，滑轮位于半球球心O的正上方。现拉动绳端使小球缓慢上移，问绳子对的小球拉力大小和半球体对小球的支持力大小如何变化？



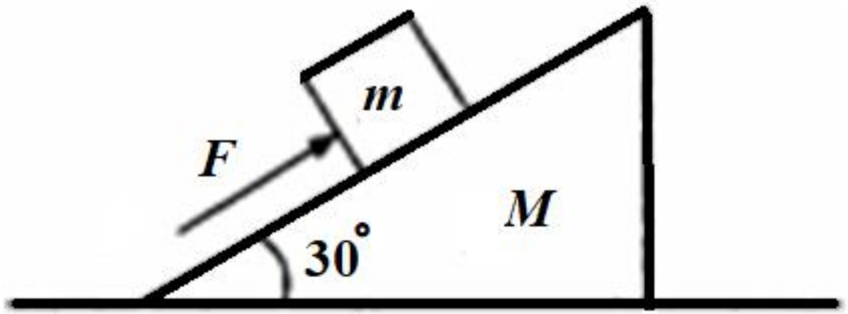
$$\frac{G}{T}=\frac{d+r}{L} \quad 且 \quad \frac{G}{N}=\frac{d+r}{r}$$

得 $T=\dfrac{GL}{d+r}$ 和 $N=\dfrac{Gr}{d+r}$

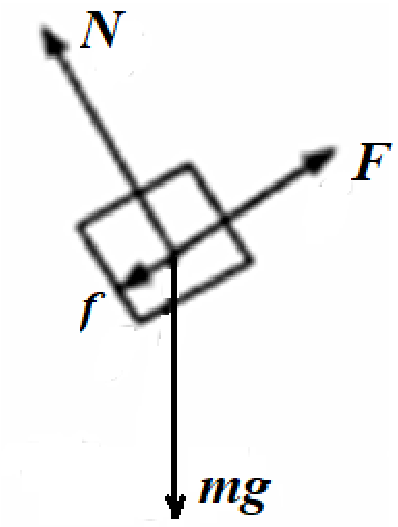
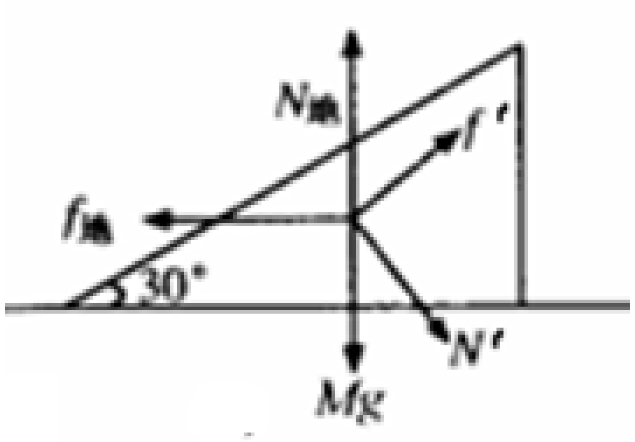
故当 L 变小时，$T=\dfrac{GL}{d+r}$ 减小，$N=\dfrac{Gr}{d+r}$ 保持不变。

整体法与隔离法

【例6】如图所示，质量为m=5kg的物体，置于一粗糙的斜面上，用一平行于斜面的大小为30N的力F推物体，使物体沿斜面向上匀速运动，斜面体质量M=10kg，且始终静止，取g=10m/s^2，求地面对斜面的摩擦力及支持力。

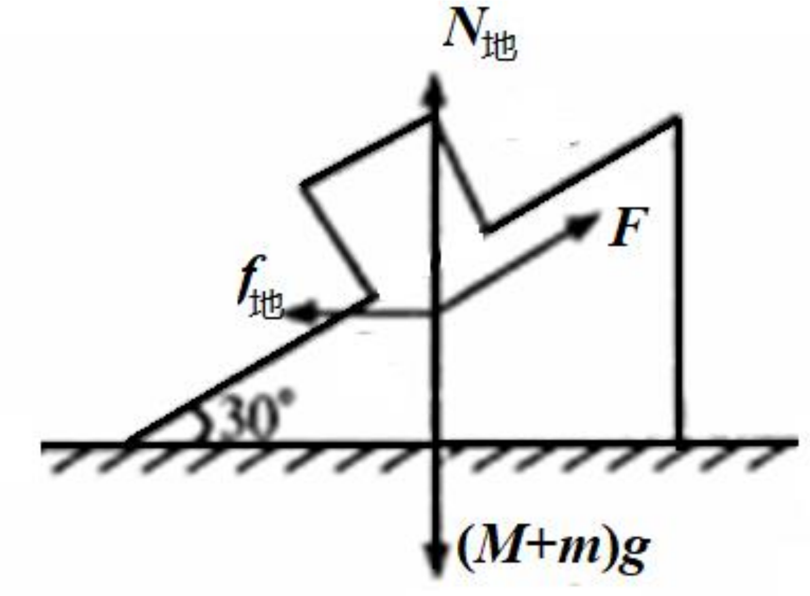


【方法 1】（单一的隔离法）

对象	物体 m	斜面 M
受力图		
平衡方程	$N = mg\cos30°$ $F = mg\sin30° + f$	$N_{地} = Mg + N\cos30° - f\sin30°$ $f_{地} = N\sin30° + f\cos30°$
答案	$N_{地}=(M+m)g-F\sin30°=135\text{N}$，方向竖直向上； $f_{地}=F\cos30°=15\sqrt{3}\text{ N}$，方向向左。	

【方法 2】（单一的整体法）

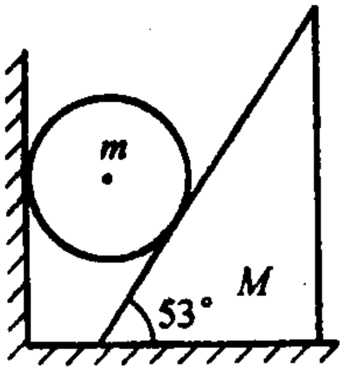
可以将物体和斜面当作一个整体来研究，其受力图如图所示：

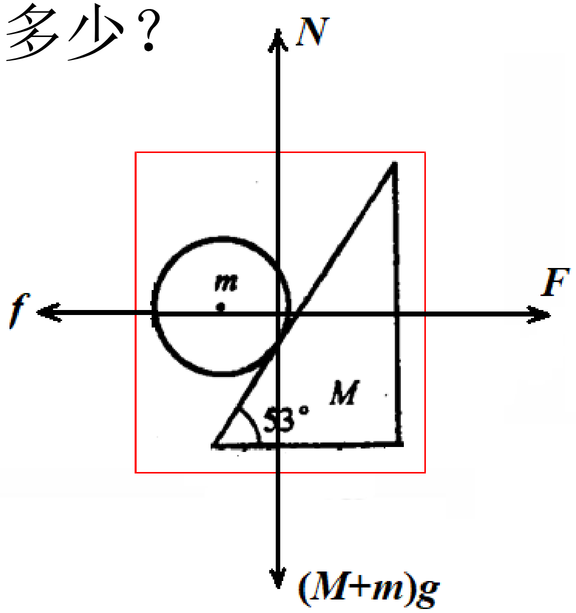


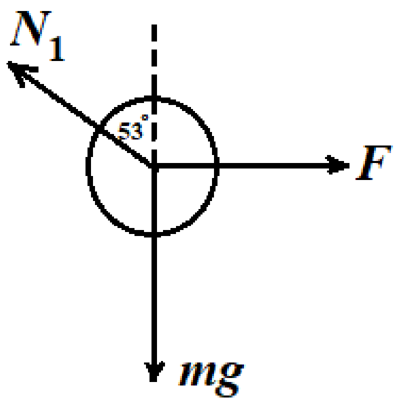
在水平方向上，有：$f_{地}=F\cos30°=15\sqrt{3}\text{ N}$

有竖直方向上，有：$N_{地}=(M+m)g-F\sin30°=135\text{N}$

【例7】如图所示，球的质量为m，斜面体的质量为M，斜面的倾角$\theta=53°$。球面光滑，它与墙面、斜面之间没有摩擦力的作用。斜面体静止在粗糙的水平面上，这时地面对斜面体的支持力大小和静摩擦力大小为多少？







【解析】本题分三步完成：

①分析“球+斜面体”整体，得到地面对斜面体的支持力$N=(M+m)g$；

②隔离球分析，不难得到墙对球的弹力$F=\dfrac{4}{3}mg$；

③再分析“球+斜面体”整体，得到地面对斜面体的摩擦力$f=F=\dfrac{4}{3}mg$。

【点评】与上一题例6不同，单一的整体法求不出所有结果（只能求出支持力），故需要把整体法与隔离法结合起来。那隔离哪个物体呢？由于球的受力较简单，故隔离球最合适，这样就形成了最佳搭配。

再见